Δ.Ε. : Διαφορικές Εξισώσεις (1)

Με τις διαφορ. εξισώσεις προσπαθούμε να μελετήσουμε τη κάθε συνάρτηση αν γνωρίζουμε κάποια στοιχεία από την παράγωγο.

πχ1: όταν. $y'(x) = 2$ και $y(3) = 9$ τότε
η $y(x) = 2x + c$
για $x = 3$: $y(3) = 6 + c \Leftrightarrow 9 = 6 + c \Leftrightarrow c = 3$
άρα $y(x) = 2x + 3$.

Πχ.2 : $2 + x^2 = \sin x$ δεν υπάρχει λύση
Πχ.3 : $2 + x^2 = \sin(y'(x))$ (διαφορ. εξίσωση)
δεν υπάρχει λύση επίσης
Πχ.4 Η εξ. $y'(x) + \sin(y'(x)) = 7$ είναι μία Δ.Ε.

- Πρώτα κοιτάμε στις Δ.Ε. τα προβλήματα ύπαρξης
- Δεύτερον αν υπάρχει έστω μία λύση και στη συνέχεια αν υπάρχει το πολύ μία λύση

Πχ 5
$y'(x) = f(x)$, $x \in [0,10]$
$y(1) = 7$

α' τρόπος (αόριστη ολοκλήρωση)

$\int y'(x)dx = \int f(x)dx + c \Leftrightarrow y(x) = \int f(x)dx + c$

αν $f(x) = x^2$
$y(x) + c_1 = \frac{x^3}{3} + c_2 \Rightarrow y(x) = \frac{x^3}{3} + c$
$y(1) = 7$ άρα $\frac{1}{3} + c = 7 \Rightarrow c = \frac{20}{3}$
άρα $y(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{20}{3}$, $x \in [0,10]$

Β' τρόπος (ορισμένη ολοκλήρωση)

$$\int_1^x y'(s)\,ds = \int_1^x s^2\,ds \ , \quad x\in[0,10]$$

$$y(x)-y(1) = \left[\frac{s^3}{3}\right]_{s=1}^{s=x} \Leftrightarrow y(x) = 7+\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$
$$y(x) = \frac{x^3}{3}+\frac{20}{3} \ , \ x\in[0,10]$$

Πχ. 6

$$f(x)=\begin{cases} 2 \ , & x\in[0,5] \\ 3 \ , & x\in(5,10]\end{cases}$$

i) $x\in[0,5] \rightsquigarrow y(x) = 7+\int_1^x 2\,ds = 7+2(x-1) = 2x+5$

ii) $x\in(5,10] \rightsquigarrow y(x) = 7+\int_1^5 2\,ds + \int_5^x 3\,ds = 3x$

άρα $y(x)=\begin{cases} 2x+5 \ , & x\in[0,5] \\ 3x \ , & x\in(5,10]\end{cases}$

Είναι παραγωγίσιμη;

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{y(x)-y(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5^+}\frac{3x-15}{x-5} = 3$$

$$\lim_{x\to 5^-}\frac{y(x)-y(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5^-}\frac{2x+5-15}{x-5} = \lim_{x\to 5^-}\frac{2x-10}{x-5} = 2$$

Δεν πρέπει αναγκαστικά να είναι παραγωγίσιμη

$a_2(x)y'(x)+a_1(x)y(x)=0$, $x\in I$ (Η πιο εύκολη περίπτωση)

- Δεν πρέπει όμως να μηδενίζεται το $a_2(x)$ στο $x\in I$

Πχ η εξίσωση: $x^2y'(x)+y(x)=0$, $x\in I \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y'(x)+\frac{1}{x^2}y(x)=0 \Leftrightarrow e^{\int\frac{1}{x^2}dx}y'(x)+e^{\int\frac{1}{x^2}dx}\frac{1}{x^2}y(x)=0 \Leftrightarrow$$
$$\left[e^{\int\frac{1}{x^2}dx}y(x)\right]' = (c)' \Leftrightarrow e^{\int\frac{1}{x^2}dx}y(x)=c \Leftrightarrow$$

$$y(x)=ce^{-\int\frac{1}{x^2}dx} = ce^{\int-\frac{1}{x^2}dx}$$ άρα $y(x)=ce^{\frac{1}{x}}$ ή αλλιώς

$$y(x)=c\cdot e^{\frac{1}{x}+c_2} = ce^{\frac{1}{x}}\cdot e^{c_2}$$

άρα στη μία περίπτωση η σταθερά είναι η c και στην άλλη — || — —— || —— ce^{c_2}.

Δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά!